Matemáticas I **7–Febrero–08**

1. Demuestra, por inducción sobre $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} k\,2^k = (n-1)\,2^{n+1} + 2 \quad \text{(2 puntos)}$$

   Solución:

   Si $n = 1$, ambos miembros dan 2.

   Supongamos cierta la igualdad para $n \geq 1$ y probémosla para $n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k\,2^k = \left(\sum_{k=1}^{n} k\,2^k\right) + (n+1)\,2^{n+1} = ((n-1)\,2^{n+1} + 2) + (n+1)\,2^{n+1} =$$

$$= 2^{n+1}\,2n + 2 = n\,2^{n+2} + 2$$

2. En el conjunto $\mathbf{N}$ de los números naturales fijamos un número $n \neq 0$ y se considera la relación

$$R = \{(a,b) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} \mid |b-a| \leq n\}$$

   ¿Es una relación reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva? (2 puntos).

   Solución:

   La relación es reflexiva, pues

$$|a-a| = 0 \leq n \Longrightarrow a \in R, \forall a \in \mathbf{N}$$

   Es simétrica pues

$$(a,b) \in R \Longrightarrow |b-a| \leq n \Longrightarrow |a-b| \leq n \Longrightarrow (b,a) \in R$$

   No es antisimétrica pues $(0,n) \in R, (n,0) \in R$, pero $0 \neq n$.

   Tampoco es transitiva pues $(0,n) \in R, (n,2n) \in R$, pero $(0,2n) \notin R$, pues $|2n| \nleq n$.

3. Describe en el lenguaje que estimes oportuno un procedimiento para resolver un sistema de congruencias enteras (caso de dos o más). Aplícalo al sistema

$$\left\{\begin{array}{lllll} x & \equiv & 1 & \bmod & 2 \\ x & \equiv & 2 & \bmod & 3 \\ x & \equiv & 2 & \bmod & 5 \end{array}\right. \qquad \text{(8 puntos)}$$

   Solución:

Puede tomarse como modelo el procediminto de la página 48 del libro de texto. Tomando las dos primeras congruencias

$$\begin{cases} x \equiv 1 \mod 2 \\ x \equiv 2 \mod 3 \end{cases} \qquad \text{(8 puntos)}$$

buscamos $x = 1 + 2y$ cumpliendo la segunda, es decir

$$1 + 2y \equiv 2 \mod 3$$

Operando,

$$2y \equiv 1 \mod 3$$

Ahora el inverso de $2 \mod 3$ es el propio 2 y tenemos

$$y \equiv 2 \mod 3$$

Tomando $y = 2$, tenemos $x = 5$. Pasamos a resolver, el nuevo sistema

$$\begin{cases} x \equiv 5 \mod 6 \\ x \equiv 2 \mod 5 \end{cases}$$

De la misma manera,

$$x = 5 + 6z \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow x = 17$$

Y la solución general es

$$17 + 60k, k \in \mathbf{Z}$$

4. Describe en el lenguaje que estimes el algoritmo de Euclides para calcular el mcd (**mónico**) de dos polinomios. Aplícalo al par $(x^3 + x^2 + 1, x^2 - 1)$. (5 puntos)

   Solución: Puede tomarse como modelo el procediminto de la página 54 del libro de texto.

   En particular, para $f = x^3 + x^2 + 1$ y $g = x^2 - 1$, tenemos en primer lugar $r = x + 2$. Posteriormente, $r = 3$, por lo que el mcd (**mónico**) será 1.

5. En el espacio vectorial $V = \mathbf{R}_2[x]$ se considera la aplicación $h\colon V \longrightarrow V$ que cumple

   $$h(1) = 1 + x \quad h(1 + x) = 2 \quad h(1 + x + x^2) = x^2$$

   Se pide:

   (a) Probar que h define un endomorfismo (1 punto).

   (b) Matriz coordenada A de h en la base $(1, x, x^2)$ (2 puntos).

   (c) ¿Es diagonalizable? En caso afirmativo, encontrar una base de vectores propios[1] de h (3 puntos).

   Solución:

[1] La respuesta deben ser polinomios

(a) Puesto que la familia $(1, 1+x, 1+x+x^2)$ es claramente libre[2] y tiene tres vectores, es una base; por tanto, tales asignaciones definen un único endomorfismo.

(b)
$$h(x) = h(1+x-1) = h(1+x) - h(1) = 2 - (1+x) = 1 - x$$
$$h(x^2) = h(1+x+x^2-(1+x)) = h(1+x+x^2) - h(1+x) = x^2 - 2$$

Por tanto, la m.c. de h es
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) El polinomio característico del endomorfismo es
$$x^3 - x^2 - 2\,x + 2 = (x-1)(x^2-2)$$

$V(1) = \mathcal{N}(I - A) =< (4, 2, 1) >$
$V(\sqrt{2}) = \mathcal{N}(\sqrt{2}\,I - A) =< (1, \sqrt{2}-1, 0) >$
$V(-\sqrt{2}) = \mathcal{N}(\sqrt{2}\,I - A) =< (-1, \sqrt{2}+1, 0) >$
Puesto que $\dim V(1) + \dim V(\sqrt{2}) + \dim V(-\sqrt{2}) = 3 = \dim V$, A y, en consecuencia, h es diagonalizable. Una base de vectores propios es
$$(4 + 2x + x^2, 1 + (\sqrt{2}-1)x, -1 + (\sqrt{2}+1)x)$$

6. Describe, en el lenguaje que estimes oportuno, un procedimiento que tome como entrada una matriz ortogonal de orden 2 y dé como salida P ortogonal tal que $P^t AP$ es una de
$$\mathrm{diag}[1, -1] \qquad \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\mathrm{sen}\,\alpha \\ \mathrm{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad \alpha \in [0, \pi]$$

Aplícalo a la matriz permutación P_{12} (7 puntos).

Solución: Puede tomarse como modelo el procedimiento de la página 136 del libro de texto.

Para la matriz dada
$$\det(xI - P_{12}) = (x-1)(x+1) \Longrightarrow B = \mathrm{diag}[1, -1]$$
$$V(1) = \mathcal{N}(I - P_{12}) =< (1, 1) >$$
$$V(-1) = \mathcal{N}(-I - P_{12}) =< (-1, 1) >$$

Normalizando ambos vectores
$$P = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

[2] ningún polinomio es c.l. de los anteriores

7. En el espacio euclídeo $\mathbf{R}^3$ se considera la afinidad φ de ecuación

$$Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 & 0 \\ -4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X$$

y la simetría ortogonal σ de base el plano de ecuación $x = 0$ se pide

(a) Probar que φ es un movimiento (1 punto)

(b) Elementos notables de φ (1.5 puntos)

(c) Ecuación de $h = \varphi \circ \sigma$ (1.5 puntos)

(d) Probar que h es un movimiento (1 punto)

(e) Elementos notables de h (2.5 puntos)

(f) Ecuaciones implícitas de la imagen, por h, de la recta

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & 0 \\ y & = & 1 \end{array} \right. \qquad \text{(2.5 puntos)}$$

Solución:

(a)
$$\begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 & 0 \\ 4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 & 0 \\ -4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

(b) Sean G, g las matrices de la ecuación. Entonces,

$$\operatorname{rang}(I - G) = \operatorname{rang}(I - G|g) = 2$$

por tanto, se trata de un giro axial de eje

$$(I - G)X = g \sim \cdots \sim \left\{ \begin{array}{rl} 2x - 4y = & 5 \\ 4x + 2y = & -5 \end{array} \right.$$

Por otro lado,

$$\det(xI - G) = (x - 1)(x^2 - \frac{6}{5}x + 1) \Longrightarrow -2\cos\alpha = -\frac{6}{5} \Longrightarrow \alpha = \arccos\frac{3}{5}$$

(c) Para la ecuación de h necesitamos la de σ: puesto que el origen está en la base de simetría, la ecuación es de la forma $Y = SX$ y para calcular S obtenemos los simétricos del primer punto fundamental A_1, pues los otros dos son dobles. Ahora, A_1 se proyecta[3] en el $(0, 0, 0)$, luego su simétrico es

$$(1, 0, 0) + 2(-1, 0, 0) = (-1, 0, 0)$$

En definitiva la matriz S es $\operatorname{diag}[-1, 1, 1]$.

[3] esto es obvio pero puede calcular la proyección el lector que lo desee cortando la base $x = 0$ con la recta $A_1 + \mathbf{R} < e_1 >$

La ecuación de h se obtiene de

$$X \hookrightarrow SX \hookrightarrow g + G(SX)$$

es decir,

$$Y = g + (GS)X$$

Operando,

$$GS = \begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 & 0 \\ 4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(d)

$$(GS)^t(GS) = S^tG^tGS = S^tS = I_3$$

(e)

$$\mathrm{rang}(I - GS) = 1 < 2 = \mathrm{rang}(I - GS|g)$$

Por tanto, se trata de una simetría especular seguida de una traslación paralela al plano de simetría.
El vector normal del plano de simetría se lee de

$$(I - GS)X = (0) \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow 2x - y = 0$$

Es decir, el vector normal del plano es $u = (2, -1, 0)$. Ahora,

$$< u, g + (GS - I)X >= 0 \Longrightarrow 4x - 2y = 3$$

que es la ecuación del plano de simetría. Para el vector de traslación, tomamos el punto $P = (3/4, 0, 0)$ en el plano y calculamos su imagen, obteniendo $h(P) = (11/20, -2/5, 0)$. Por tanto, el vector de traslación es $(-1/5, -2/5, 0)$.

(f) La imagen de una recta por un movimiento es una recta. Tomamos pues dos puntos $P(0, 1, 0)$, $Q(0, 1, 1)$ en r y calculamos sus imágenes

$$g(P) = (1, -1, 0)^t + \begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 & 0 \\ 4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (0, 1, 0)^t = (9/5, -2/5, 0)^t$$

$$g(Q) = (1, -1, 0)^t + \begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 & 0 \\ 4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (0, 1, 1)^t = (9/5, -2/5, 1)^t$$

Y la ecuación de la recta imagen se deduce de

$$\mathrm{rang} \begin{pmatrix} x - 9/5 & y + 2/5 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

Es decir,

$$\left\{ \begin{array}{rcr} 5x & = & 9 \\ 5y & = & -2 \end{array} \right.$$